Dyskretna transformata cosinusowa

Temat 6

Piotr Syga

2022

Idea

Dyskretna transformata cosinusowa

- podobnie jak FT – reprezentacja odpowiedzi na działanie okresowego sygnału
- reprezentacja za pomocą liczb rzeczywistych
- brak wrażliwości na skalę
- redukcja liczby funkcji potrzebnych do aproksymacji sygnału
- *rodzina* transformat i transformat odwrotnych (tylko DCT IV jest swoją transformatą odwrotną)
- poszczególne typy transformat mają inne warunki brzegowe
- powszechne zastosowanie w kodowaniu i kompresji, biometrii, steganografii, analizie jakości sygnału

Typy transformaty cosinusowej

DCT-I

$$Y_k = \frac{1}{2}(x_0 + (-1)^k x_{N-1}) + \sum_{n=1}^{N-2} x_n \cos(\frac{\pi nk}{N-1})$$

iDCT-I

$$X_k = \frac{2}{N-1}\left(\frac{1}{2}(y_0 + (-1)^k y_{N-1}) + \sum_{n=1}^{N-2} x_n \cos(\frac{\pi nk}{N-1})\right)$$

DCT-I N próbek rzeczywistych odpowiada transformacie Fouriera dla $2N-2$ symetrycznych próbek rzeczywistych.

Typy transformaty cosinusowej

DCT-II

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})k}{N}\right)$$

iDCT-II

$$X_k = \frac{2}{N}\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos\left(\frac{\pi(k+\frac{1}{2})n}{N}\right)\right)$$

Jedna z dwóch najczęściej używanych transformat – odpowiada przeskalowanej transformacie Fouriera $4N$ symetrycznych, rzeczywistych próbek (z wartościami zerowymi). Zarówno Y_0 jak i cała macierz przekształcenia mogą być reskalowane.

Typy transformaty cosinusowej

DCT-III

$$Y_k = \frac{x_0}{2} + \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi(k+\frac{1}{2})n}{N}\right)$$

iDCT-III

$$X_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos\left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})k}{N}\right)$$

Najczęściej używana (po przeskalowaniu) jako transformata odwrotna DCT-II.

Typy transformaty cosinusowej

DCT-IV

$$Y_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}{N}\right)$$

iDCT-IV

$$Y_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}{N}\right)$$

Druga z dwóch najczęściej używanych transformat, ze względu na swoją ortogonalność – DCT jest równa iDCT. Pozawala na stworzenie transformaty dla nakładających się sygnałów. Odpowiada transformacie Fouriera dla $8N$ symetrycznych próbek rzeczywistych.

Typy transformaty cosinusowej

- Dalsze typy transformaty cosinusowej (V-VIII) łamią punkty symeterii względem końca przedziału, przez co obliczenie transformaty korzystając z FFT wymaga kosztownych dodatkowych operacji i jest nieefektywne.
- Wielowymiarowa transformata cosinusowa jest złożeniem transformaty na wierszach i kolumnach, np. dla DCT-II:
  2D:

$$Y_{k,j} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x_{n,m} \cos\left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})k}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi(m+\frac{1}{2})j}{M}\right)$$

  3D:

$$Y_{k,j,i} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x_{n,m,l} \cos\left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})k}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi(m+\frac{1}{2})j}{M}\right) \cos\left(\frac{\pi(l+\frac{1}{2})i}{L}\right)$$

Podstawowe własności

- usuwanie korelacji pomiędzy sąsiednimi pikselami
- skoncentrowanie informacji o obrazie w głównych współczynnikach
- redukcja entropii
- możliwość podzielenia na N-wymiarowej transformaty na N niezależnych kroków liczenia jednowymiarowej transformaty
- symetria
- łatwa do osiągnięcia ortogonalność
- efektywne obliczanie